

## 6. Orbits und der Runge-Lenz Vektor

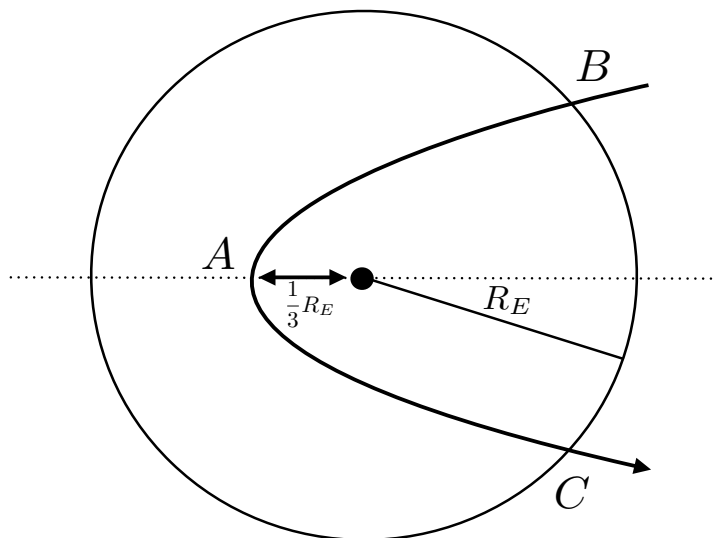
---

### Übung 6.1: Ein Komet

Ein Komet mit der Masse  $m$  bewegt sich auf einer Parabel im Gravitationsfeld der Sonne (Masse  $M$ ). Der Komet bewegt sich in der selben Ebene, in der auch die Bewegung der Erde stattfindet. Die Umlaufbahn der Erde wird als kreisförmig angenommen. Die Periheldistanz des Kometen von der Sonne beträgt ein Drittel des Radius der Erdbahn  $R_E$ . Zeigen Sie, dass die Flugzeit des Kometen vom Punkt  $B$  bis zum Punkt  $C$  (siehe Abbildung)

$$T_{\text{total}} = \frac{20}{9} \frac{R_E^{3/2}}{\sqrt{(3\gamma(M+m))}}$$

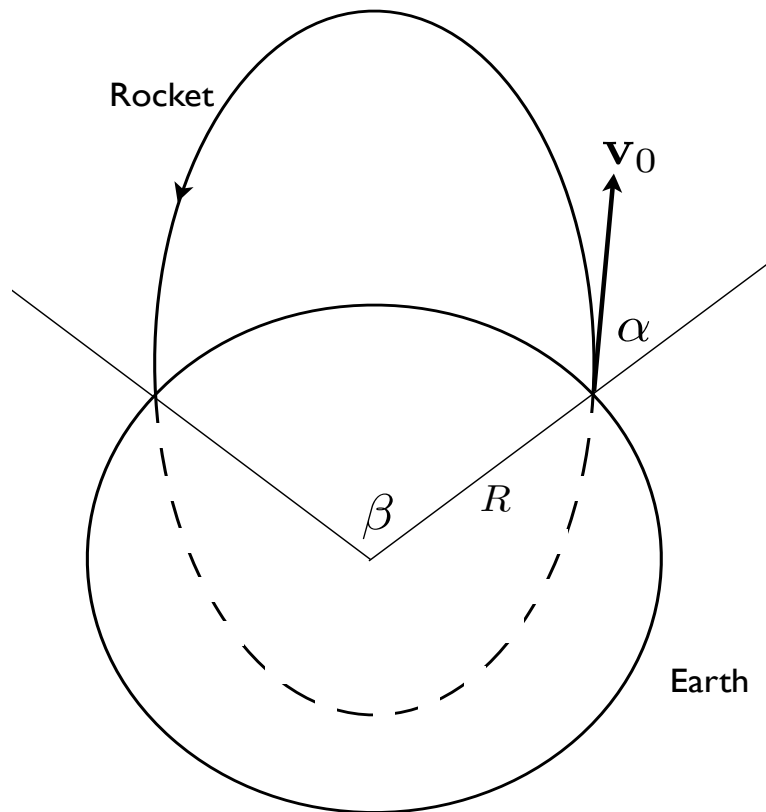
beträgt.



*Hinweis: Betrachten Sie die Formel für die Energie des Systems in Abhängigkeit von der reduzierten Masse. Verwenden Sie diese Gleichung, um  $\dot{r}$  als Funktion der Entfernung von der Sonne  $r$  zu berechnen. Integrieren Sie  $\frac{1}{\dot{r}}$  über  $r$  auf, um die Laufzeit zu berechnen.*

### Übung 6.2: Die Rückkehr der Kanone(nkugel)

Die Flugbahn einer Kanonenkugel beschreibt ein Stück einer Ellipse, die durch die Erdoberfläche (Radius  $R$ ) geschnitten wird (siehe Abbildung). Im folgenden ignorieren wir den Luftwiderstand.



- a) Benutzen Sie den Runge-Lenz-Vektor und die Drehimpulserhaltung um zu zeigen, dass die Reichweite  $\beta R$  der Kanone durch die Gleichung

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sin\alpha \cos\alpha}{\frac{gR}{v_0^2} - \sin^2\alpha}$$

bestimmt wird. In dieser Gleichung ist  $g$  die Erdbeschleunigung an der Erdoberfläche,  $v_0 = |\mathbf{v}_0|$  und  $\alpha$  und  $\beta$  sind die in der Abbildung dargestellten Winkel.

- b) Betrachten Sie den Grenzfall, in dem  $R$  sehr groß ist, während  $g$  und  $v_0$  festgehalten werden. Vergleichen Sie in diesem Fall das Ergebnis von a) mit dem von Aufgabe 2.2 (auf dem zweiten Übungsblatt).
- c) Bestimmen Sie den Wert von  $\alpha$  der eingestellt werden muss, um die maximale Reichweite der Kanone zu erreichen. Nehmen Sie hier *nicht* den Grenzfall von Aufgabe b) an. Verwenden Sie für die Winkel die Intervalle  $0 < \beta < \pi$  und  $0 < \alpha < \pi/2$ .

### Übung 6.3: Reise in das Zentrum eines Zentralpotential

Ein Teilchen bewegt sich in einem attraktiven Zentralpotential ( $c > 0$ )

$$V(r) = -\frac{c}{r^2}.$$

- a) Zeigen Sie, dass das Teilchen das Zentrum  $r = 0$  nicht erreichen kann, wenn  $c < \frac{L^2}{2m}$  gilt. Dabei bezeichnet  $L$  den Drehimpuls und  $m$  die Masse des Teilchens.
- b) Überlegen Sie sich, wie sich diese Situation ändert, wenn  $V(r) = -\frac{c}{r}$ .