Übungen zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2013
Prof. Dr. Dieter Lüst — Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 — James.Gray@physik.uni-muenchen.de

2. Die Newton'schen Axiome

Übung 2.1: Endgeschwindigkeit

Ein Teilchen mit der Masse m befindet sich in Ruhe und wird zur Zeit $t = 0$ fallengelassen. Seine Fallgeschwindigkeit wird mit v bezeichnet.

a) Auf das Teichen wirkt durch den Luftwiderstand eine Kraft $-kv$. Außerdem wirkt die Schwerkraft gm. Dabei werden g und k als konstant angenommen. Beweisen Sie den folgenden Zusammenhang:

$$\dot{v} + \beta v = g \quad \text{und wir definieren} \quad \beta = \frac{k}{m}$$

b) Lösen Sie diese Gleichung für die Anfangsgeschwindigkeit $v = 0$.

c) Was passiert wenn $t \to \infty$ strebt?

Lösung von Übung 2.1

Die Gesamtkraft, die auf das Teilchen wirkt, ist

$$F = gm - kv\ .$$

Das zweite Newton'sche Axiom besagt

$$\begin{aligned} ma &= gm - kv \\ &\Rightarrow \quad a = g - \frac{k}{m}v \\ &\Rightarrow \quad \dot{v} = g - \beta v \Rightarrow \dot{v} + \beta v = g\,, \end{aligned}$$

wobei a die Beschleunigung des Teilchens ist. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$v = \frac{g}{\beta} + ce^{-\beta t}\,,$$

wobei c eine Integrationskonstante darstellt. Aus der Anfangsbedingung

$$v = 0 \ \text{ wenn } \ t = 0 \Rightarrow \frac{g}{\beta} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{g}{\beta}$$

wird c ermittelt. Die Geschwindigkeit des Teilchens ergibt sich somit aus

$$v = \frac{g}{\beta}\left(1 - e^{-\beta}t\right)\ .$$

Wenn $t \to \infty$ strebt, dann strebt $v \to \frac{g}{\beta}$. Somit ergibt sich eine konstante "Endgeschwindigkeit".

Übung 2.2: Reichweite einer Kanone

Eine Kanone feuert über eine Klippe der Höhe h. Die Austrittsgeschwindigkeit der Kanonenkugel beträgt v_0. Die Kanone ist im Winkel θ zum Boden aufgestellt. Wie hoch ist die Reichweite der Kanone in Abhängigkeit von θ und v_0? Ignorieren Sie den Luftwiderstand.

Lösung von Übung 2.2

Das zweite Newton'sche Axiom besagt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad &\Rightarrow \quad m\mathbf{g} = m\mathbf{a} \\
&\Rightarrow \quad m\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \ \text{ und} \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases} .
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichungen ist

$$\begin{aligned}
x &= c_1 t + c_2 \\
y &= -\frac{g}{2}t^2 + c_3 t + c_4 \ .
\end{aligned}$$

Hier sind c_1, c_2, c_3 und c_4 Integrationskonstanten, die im folgenden bestimmt werden müssen.

Wir legen fest, dass die Kanone sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet.

$$\begin{aligned}
x = 0 \ \text{ wenn } \ t = 0 \ &\Rightarrow \ c_2 = 0 \\
y = 0 \ \text{ wenn } \ t = 0 \ &\Rightarrow \ c_4 = 0 \\
\dot{x} = v_0 \cos\theta \ \text{ wenn } \ t = 0 \ &\Rightarrow \ c_1 = v_0 \cos\theta \\
\dot{y} = v_0 \sin\theta \ \text{ wenn } \ t = 0 \ &\Rightarrow \ c_3 = v_0 \sin\theta
\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}
x &= v_0\, t \cos\theta \\
y &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0\, t \sin\theta \ .
\end{aligned}$$

Die Kanonenkugel trifft den Boden zu einer Zeit $t_f > 0$, wenn gilt $y = -h$.

$$-h = -\frac{g}{2}t_f^2 + v_0\, t_f \sin\theta$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$t_f = \frac{1}{g}\left(v_0 \sin\theta + \sqrt{2gh + v_0^2 \sin^2\theta}\right) .$$

Nun können wir die Reichweite $x(t_f)$ der Kanone aus bereits ermittelten Funktion $x(t)$ bestimmen.

$$x_f = \frac{v_0 \cos\theta}{g}\left(v_0 \sin\theta + \sqrt{2gh + v_0^2 \sin^2\theta}\right)$$

Übung 2.3: Teilchen in einem Magnetfeld

Ein Teilchen mit der Ladung q und der Masse m bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B}$. Es erfährt die Lorentzkraft

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,.$$

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Teilchen die Geschwindigkeit $\mathbf{u}$. Das Magnetfeld ist durch $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie die Position des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit t.

b) Welche Bewegung vollführt das Teilchen wenn $\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = 0$ gilt?

Lösung von Übung 2.3

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ u_z \\ -u_y \end{pmatrix} B_x \\
\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad &\Rightarrow \quad \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_z \\ -v_y \end{pmatrix} B_x
\end{aligned}$$

Das zweite Newton'sche Axiom besagt:

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} \Rightarrow q \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{z} \\ -\dot{y} \end{pmatrix} B_x = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}\,.$$

Die Lösung für die x-Komponente dieser Differentialgleichung lässt sich sofort als

$$\ddot{x} = 0 \Rightarrow x = c_1 t + c_2$$

angeben. Dabei sind c_1 und c_2 Integrationskonstanten. Aus den Anfangsbedingungen lassen sie sich wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned}
x = 0 \,\text{wenn}\, t = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_2 = 0 \\
\dot{x} = u_x \,\text{wenn}\, t = 0 \quad &\Rightarrow \quad c_1 = u_x\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$x = u_x t\;.$$

Nun definieren wir $k = \frac{q}{m} B_x$. Damit lauten die Differentialgleichungen für die y- und z-Komponente

$$\ddot{y} = k\dot{z} \quad \text{und} \quad \ddot{z} = -k\dot{y} \tag{1}$$

$$\ddot{z} = -k\dot{y} \Rightarrow \dot{z} = -ky + c_3\,. \tag{2}$$

Wobei c_3 wieder eine Integrationskonstante ist, deren Wert wie folgt bestimmt wird:

$$\dot{z} = u_z \text{ und } y = 0 \text{ wenn } t = 0 \Rightarrow u_z = -k \times 0 + c_3 \Rightarrow c_3 = u_z\,. \tag{3}$$

Verwenden wir nun (1), (2) und (3) so ergibt sich

$$\ddot{y} = k(-ky + u_z) = -k^2 y + k u_3\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist

$$y = c_4 \cos kt + c_5 \sin kt + \frac{u_z}{k}\,.$$

Aus den Anfangsbedingungen ergeben sich die Konstanten c_4 und c_5.

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ wenn } t = 0 \quad &\Rightarrow \quad 0 = c_4 + \frac{u_z}{k} \Rightarrow c_4 = -\frac{u_z}{k} \\ \dot{y} = u_y \text{ wenn } t = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_y = c_5 k \Rightarrow c_5 = \frac{u_y}{k} \end{aligned}$$

Somit gilt

$$y = -\frac{u_z}{k} \cos kt + \frac{u_y}{k} \sin kt + \frac{u_z}{k}\,.$$

Mit diesem Ergebnis und Gleichung (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{z} \quad &= \quad -k\left(-\frac{u_z}{k} \cos kt + \frac{u_y}{k} \sin kt + \frac{u_z}{k}\right) + u_z \\ \Rightarrow \quad z &= \frac{u_z}{k} \sin kt + \frac{u_y}{k} \cos kt + c_6\,. \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder die Anfangsbedingungen um die Konstante c_6 festzulegen.

$$z = 0 \text{ wenn } t = 0 \Rightarrow 0 = \frac{u_y}{k} + c_6 \Rightarrow c_6 = -\frac{u_y}{k}$$

Die vollständige Lösung lautet somit

$$\begin{aligned} x &= u_x t \\ y &= -\frac{u_z}{k} \cos kt + \frac{u_y}{k} \sin kt + \frac{u_z}{k} \\ z &= \frac{u_z}{k} \sin kt + \frac{u_y}{k} \cos kt - \frac{u_y}{k}\,. \end{aligned}$$

Wenn $\mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = 0$ gilt, dann können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u_z = u_x = 0$ gewählt werden und wir finden

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u_y}{k} \sin kt \\ \frac{u_y}{k} \cos kt \end{pmatrix}\,.$$

Diese Bewegung findet auf einem Kreis statt.