Übungen zur T1: Theoretische Mechanik, SoSe2013
Prof. Dr. Dieter Lüst — Dr. James Gray
Theresienstr. 37, Zi. 425 — James.Gray@physik.uni-muenchen.de

8. Starre Körper

Übung 8.1: Berechnung von Trägheitstensoren

Um die Anwendung von Volumenintegralen zu vertiefen, bietet es sich an, die Trägheitstensoren einiger einfacher Objekte mit homogener Massendichte zu bestimmen. Berechnen Sie den Trägheitstensor

a) einer Kugelschale mit Radius R (Masse M verteilt auf der unendlich dünnen Kugeloberfläche),
b) eines Zylinders mit Höhe H und Radius R,
c) eines Hohlzylinders mit Höhe H und Radius R (Masse M verteilt auf der unendlich dünnen Mantelfäche).

Zur Behandlung der Kugelschale und des Hohlzylinders ist es ratsam, die Massendichte durch eine Oberflächen-Massendichte $\sigma(x) = \text{const.}$ zu ersetzen. In der Integration ist dann statt des Volumenintegrals ein Oberflächenintegral bei konstantem Radius R zu berechnen. Verwenden Sie jeweils das auf das Problem angepasste Koordinatensystem. Legen Sie für die Berechnung des Kegels den Ursprung in die Spitze des Kegels. Für welches Verhältnis H/R handelt es sich bei den letzten drei Beispielen um Kugelkreisel?

Übung 8.2: Rollender Zylinder

Ein anfänglich ruhender Zylinder rolle eine schiefe Ebene hinunter (siehe Abbildung). Der Neigungswinkel der Ebene ist α. Der Zylinder hat eine homogene Dichte, Masse M und Radius R.

cylinderfigure1.pdf

a) Wenn man annimmt, dass der Zylinder rollt und nicht gleitet, welche Relation gilt dann zwischen der Geschwindigkeit v, mit der sich der Schwerpunkt bewegt, und der Winkelgeschwindigkeit ω des Zylinders um den Schwerpunkt?
b) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Zylinders, die sich aus der Translations- und Rotationsenergie ergibt.
c) Wie gross ist die Komponente der nach unten zeigenden Gravitationskraft $|\mathbf{F}_G| = Mg$ entlang der schiefen Ebene?
d) Wie stark wird der Schwerpunkt des Zylinders entlang der schiefen Ebene beschleunigt? Nutzen Sie bei der Rechnung die Energieerhaltung aus.

Übung 8.3: Kräftefreier symmetrischer Kreise

Diese Aufgabe verwendet die Notation und Gleichungen aus dem Skript zur Vorlesung. Das Skript kann aus dem Internet unter http://www.physik.uni-muenchen.de/lehre/vorlesungen/sose_13/T1/mechanikskript.pdf heruntergeladen werden. Bevor Sie mit dieser Aufgabe beginnen, sollten Sie sich noch einmal mit der Notation im Kapitel 4 des Skripts vertraut machen.

Die Rotation des kräftefreien symmetrischen Kreisels soll genauer untersucht werden.

a) Entwickeln Sie die Figurenachse $\hat{\mathbf{e}}_3^*$ nach den Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}^i$ im raumfesten Koordinatensystem $\mathcal{S}$ und die Drehimpulsachse $\hat{\mathbf{e}}_3$ nach den Basisvektorene $\hat{\mathbf{e}}_i^*$ im körperfesten System $\mathcal{S}^*$.Verwenden Sie dazu die Transformationsmatrix $\mathbf{D}$ in (4.9).

b) Zeigen Sie, dass sowohl $\hat{\mathbf{e}}_3^*$ in $\mathcal{S}$ als auch $\hat{\mathbf{e}}_3$ in $\mathcal{S}^*$ präzediert und geben Sie jeweils die Präzessionsfrequenz an. Beachten Sie dabei die Lösung der Euler-Winkel in (4.150).

c) Begründen Sie anhand der Struktur der Matrix $\mathbf{D}$, dass beide Frequenzen nicht identisch sind. Wie gross ist ihr Verhältnis? Wie lautet die Bedingung, dass beide Frequenzen identisch sind?

d) Scheinbar kann die Frequenz Ω' beliebig gross werden, wenn $\cos\theta \to 0$. Begründen Sie, warum Ω' stets endlich bleibt.

e) Mit den bisher erhaltenen Zwischenergebnissen ist es relativ leicht, die Gültigkeit von (4.131) zu zeigen: Berechnen Sie die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ω in $\mathcal{S}$. Gehen Sie dabei von (4.126) aus.